
Трехмерная гидродинамическая задача.

«В большинстве теорий происхождения Солнечной системы принималось, что Солнце и планетная система образовались вместе, по-видимому, в результате коллапса вращающегося облака межзвездного вещества. В последние годы начаты гидродинамические расчеты коллапса с целью получить некоторые представления об образовании звезд, но мы ещё недостаточно понимаем этот процесс, чтобы объяснить, как или при каких условиях вокруг звезды может образоваться планетная система. Образование Солнечной системы, по-видимому, является сложной трехмерной гидродинамической задачей, и моделирование подобной задачи на вычислительной машине не осуществимо. Между тем, хотя проблема ещё не решена, представляется интересным обсудить результаты некоторых простых, более идеализированных расчетов коллапса и выявить, что они могут дать для объяснения образования Солнечной системы». (Р.Б. Ларсон).

Ранее мы рассмотрели сжатие плоского гидродинамического вращающегося облака посредством образования центрального скачком уплотненного ядра постоянной плотности. При этом выяснилось, что спокойный процесс перехода оболочки в ядро возможен только в одном единственно случае: если плотность вновь образованного ядра ровно в два раза превышает плотность исходного облака. Только в этом единственном случае, подходя к ядру, независимо от его размера, степень противодействия сжатию со стороны центробежной силы будет наименьшей. Это подтверждает утверждение Эйлера о том, что «все явления природы следуют какому – то закону максимума или минимума». Во всех других случаях при образовании более плотного центрального ядра центробежные силы останавливают процесс сжатия и даже могут разрушить тело.

Такие выводы мы сделали анализируя поведение плоского гидродинамического вихря. Но хотелось бы знать, рассмотренный способ уплотнения тел – это частный случай, возможный лишь при эволюции плоского облака или же это более общее явление, справедливое и для других конфигураций? Чтобы получить ответ, рассмотрим поведение сферического тела при вихревом стоке. Составим уравнение массы, но сначала хотелось бы сказать вот о чем.

В условии задачи (что ниже) я принял плотность ядра постоянной и равной $\rho_я = \left(1 + a^3\right)\rho_o$. Читатель наверняка удивится, не понимая, откуда я взял это ограничение, эту конкретику. В результате пропадет доверие к написанному, пропадет желание знакомиться с работой.

Дело в том, что мной все это уже давно пройдено, рассмотрено, просчитано и доказано. И теперь цель моя не вести читателя той путаной дорогой, которой я шел, а - как можно проще изложить материал, спрямляя извилистые пути своих поисков. Вы уже видели, как при изложении темы плоского поля, я постарался избежать ограничений на характеристики ядра и даже на необходимость его наличия, приняв «вихревой сток». Однако, думаю, что этот не совсем удачный ход. Поэтому для начала примите на веру, вводимые мной ограничения, а потом убедитесь сами что так проще излагать и понимать написанное.

А сейчас развеем сомнении относительно «*Образование Солнечной системы, по-видимому, является сложной трехмерной гидродинамической задачей»,* и более детально рассмотрим ее.

Задача. Дано однородное сферическое тело (шар) массы m_o, радиуса R_o и постоянной плотности ρ_o. В какой-то момент центральное вещество, не выдержав тяжести, сжалось, образовав ядро радиуса $R_я$. Найти уравнение массы в период перехода оболочки в ядро, если плотность ρ_o оболочки не меняется, а плотность ядра постоянна и равна $\rho_я = \left(1 + a^3\right)\rho_o$, где «а» -постоянное безразмерное число.

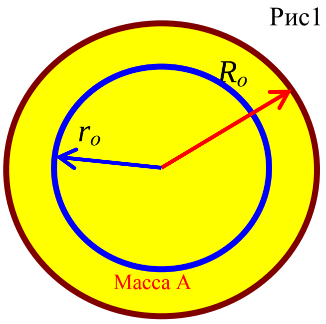
Дано: однородный шар массы, радиуса, постоянной плотности - соответственно

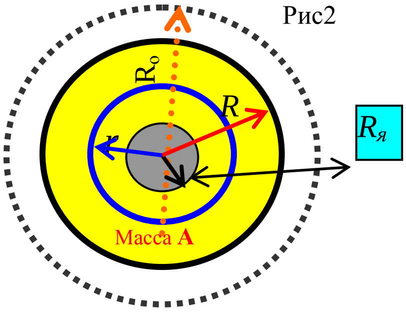
m_o	R_o	ρ_o	$m_o = 4/3\pi R_o^3 \rho_o$

Требуется найти уравнение массы в период перехода оболочки в ядро.

Рис 1. Шар в ОС$_о$. Выделим массу «А», которая находится внутри двух сферических поверхностей: радиус одной из них является радиус R_o шара, радиус другой поверхности произволен, но зафиксирован координатой – полярным радиусом r_o . Масса "А" равна $m = 4/3 \cdot \pi\, \rho_o \left(R_o^3 - r_o^3\right)$ (B)

Рис.2. Шар вышел из ОС. Часть центральной жидкости сжалась, образовав ядро. Оболочка получила возможность радиального перемещения. Плотность ее остается неизменной. В какой-то момент радиус шара равен R . Масса "А" заключена теперь между поверхностями радиуса R и r : $m = 4/3 \cdot \pi\, \rho_o \left(R^3 - r^3\right)$ (C)





Но речь идет об одной и той же массе «А», поэтому, приравнивая (B) и (C), находим

$R_o^3 - R^3 = r_o^3 - r^3 = \Delta r^3$	$1 - X^3 = x_o^3 - x^3 = \Delta x^3$	(1-5)

Уравнение (1-5) является главным уравнением эволюции сферических систем. Оно получено без учета каких-либо ограничений, накладываемых ядром. Главное уравнение выведено из условия перемещения оболочки к ядру неизвестного радиуса. Он может быть любым, в том числе и точечным образованием.

Однако в задаче сказано, что жидкость стекает не в точку стока, а образует ядро радиуса $R_я$ постоянной плотности равной $\rho_я = \left(1 + a^3\right)\rho_o$, где "а" – постоянное число.

Теперь с учетом известной плотности ядра, найдем зависимость между смещением и радиусом ядра, для чего снова вернемся к рис. 2.

Масса оболочки равна массе всего шара за вычетом массы ядра (это ясно и без рисунка)

$$m_{об} = m_o - m_я = \rho_o \cdot 4/3 \cdot \pi R_o^3 - \left(1 + a^3\right)\rho_o \cdot 4/3 \cdot \pi R_я^3$$

но она же равна всей той массе, что находится вне ядра (и это тоже очевидная истина)

$$m_{об} = \rho_o \cdot 4/3 \cdot \pi \left(R^3 - R_я^3\right)$$

Приравнивая последние уравнения и с учетом (1-5), имеем $\boxed{\Delta r = aR_я}$ (2-5)

Уравнения (1-5) и (2-5) - уравнения эволюции шара варианта "однородное ядро + однородная оболочка ("0+0")

ТБ.1-13. Уравнения эволюции сферического тела					Формулы перехода
	$\rho_я = \left(1 + a^3\right)\rho_o$	$\rho_{об} = \rho_o$			
СИ-R	$r^3 + \Delta r^3 = r_o^3$	$R^3 + \Delta r^3 = R_o^3$	$\Delta r = aR_я$		$r_o^3 = r^3 + \Delta r^3 = r^3 + R_o^3 - R^3 = r^3 + a^3 R_я^3$
СИ-X	$x^3 + \Delta x^3 = x_o^3$	$X^3 + \Delta x^3 = 1$	$\Delta x = aX_я$		$x_o^3 = x^3 + \Delta x^3 = x^3 + 1 - X^3 = x^3 + a^3 X_я^3$

Пределы изменения линейных величин.

Предельные значения линейных параметров шара определяются двумя Особыми его состояниями: - ОС$_о$, когда шар находится в исходном состояния, и – ОС$_1$, когда оболочка перейдет в ядро.

<u>*Шар в* ОС$_0$</u> В это время его внешний переменный радиус R имеет свое наибольшее значение $R = R_o$. Радиус ядра и смещение в это время равны нулю.

<u>*Шар в ОС$_1$*</u> . Оболочка полностью перешла в ядро плотности $\rho_я = (1+a^3)\rho_o$. Радиус ядра $R_я$, имея теперь свою максимальную величину, сравняется с радиусом шара R, который в это время имеет свое наименьшее значение, т.е. $R_я^{max} = R^{\min}$. По сохранению массы найдем наименьшее значение радиуса шара в ОС$_1$ - и это будет наибольшее значение радиуса ядра в это время. Вывод представлен таблицей.

Предельные значения линейных величин для шара (вывод)	
ОС$_1$: $m_o = \frac{4}{3}\pi R_o^3\rho_o = \frac{4}{3}\pi R^3(1+a^3)\rho_o = \frac{4}{3}\pi R_я^3(1+a^3)\rho_o$	
$R^{\min} = R_я^{max} = Z_2 R_o$	$X^{\min} = X_я^{\max} = Z_2$
$\Delta X^{max} = aX_я^{max} = aZ_2$	где $Z_2 = (1+a^3)^{-1/3}$

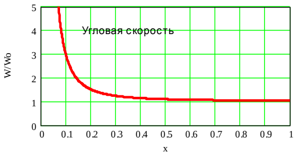
В дальнейшем при исследовании разных функций изменяющегося сферического тела будем часто пользоваться такой краткой записью

1) OC_o : $X = 1$; $(\Delta x = 0)$; 2) OC_1: $X = (1+a^3)^{-1/3}$; $\Delta x = a(1+a^3)^{-1/3}$

ТБ 2-10. Предельные значения линейных размеров шара.		
	ОС$_0$	ОС$_1$
СИ-R	$R = R_o$; $R_я = \Delta r = 0$	$R = R_я = (1+a^3)^{-1/3} R_o$; $\Delta r = a(1+a^3)^{-1/3} R_o$
СИ-Х	$X = 1$; $X_я = \Delta x = 0$	$X = X_я = (1+a^3)^{-1/3}$; $\Delta x = a(1+a^3)^{-1/3}$

Вращение жидкости в период вихревого стока. Шар.

Дано однородное по плотности и вращению сферическое тело. В какой-то момент центральное вещество сгустилось, образовав ядро. Показать распределение угловых скоростей по разрезу тела в период перехода оболочки в ядро, если плотность ее не меняется, локальный момент вращения сохраняется, а плотность ядра равна $\rho_я = (1+a^3)\rho_o$



Шар в ОС$_o$. В это время на расстоянии r_o от оси вращения зафиксируем тонкий сферический слой. Если в дальнейшем этот слой неизменной массы переместится ближе к центру на расстояние r, то из закона сохранения МКД имеем

$$\omega = \frac{J_o}{J}\omega_o = \frac{r_o^2}{r^2}\omega_o \ ; \qquad \omega = \frac{r_o^2}{r^2}\omega_o = \frac{x_o^2}{x^2}\omega_o \qquad (1\text{-}6)$$

Так вращается один сферический слой при его перемещении. Используя формулы перехода, находим

$$\omega = \frac{(x^3+\Delta x^3)^{2/3}}{x^2}\omega_o = \frac{(x^3+1-X^3)^{2/3}}{x^2}\omega_o = \frac{(x^3+a^3X_я^3)^{2/3}}{x^2}\omega_o \qquad (3\text{-}6)$$

Первые два выражения показывают кривую вращения вещества внутри оболочки при неизвестном радиусе ядра. Третий член показывает ту же кривую, но её изменение ограничено радиусом ядра плотности $\rho_я = (1+a^3)\rho_o$. Скорость вращения с глубиной увеличивается, при подходе к ядру она постоянна и равна

$$\boxed{\omega_я = (1+a^3)^{2/3}\omega_o}$$

Если уплотнение первоначально однородного по плотности и вращению сферического тела начинается с образования ядра постоянной плотности, то при сохранении локального МКД, оно (ядро) независимо от своего размера будет всегда вращаться с постоянной скоростью. Нам важен обратный вывод, объясняющий наблюдаемое однородное вращение ядер внутри небесных тел: если ядро вращается как твердое тело, значит оно имеет постоянную плотность.

Удельная кинетическая энергия ядра.

Мы знаем, что при эволюции тел по О-Я варианту размер ядра никак не зависит от размера тела. При одном и том же радиусе X шара ядро может быть очень компактным плотным образованием с быстрым вращением, имея при этом «В1» кинетическую энергию. Однако все при **том же** значении X ядро может быть менее плотным, более обширным, с медленным вращением и также иметь некоторую «В2» кинетическую энергию. Так в каком же случае (при одном и том же X радиусе тела) кинетическая энергия ядра будет наименьшей?

Ядро – шар радиуса $R_я$, массы $m_я$, скорость вращения - $\omega_я = \left(1+a^3\right)^{\frac{2}{3}}\omega_o$. Его кинетическая энергия $K_я$ равна

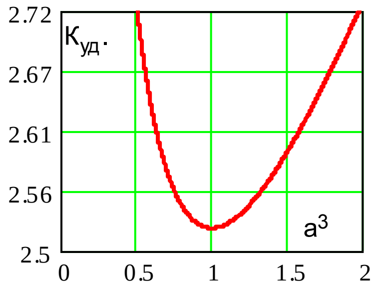
$$K_я = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}m_я R_я^2\omega_я^2. \qquad (10\text{-}12)$$

Однако для объективности результата надо сравнивать количество кинетической приходящейся на единицу массы ядра. Поделив (10-12) на массу ядра, мы получим его удельную кинетическую энергию т.е.

$$K_я^{уд} = \frac{1}{5}R_я^2\omega_я^2 = \frac{1}{5}R_я^2\cdot\left(1+a^3\right)^{4/3}\omega_o^2 = \frac{1}{5}R_o^2\omega_o^2\cdot\left(1+a^3\right)^{4/3}X_я^2 = \left(1+a^3\right)^{4/3}X_я^2\cdot\frac{K_o}{m_o}.$$

Но из уравнения массы следует $\Delta x = aX_я$ и $X^3+\Delta x^3 = 1$, поэтому

$$\boxed{K_я^{уд} = \frac{\left(1+a^3\right)^{4/3}}{a^2}\Delta x^2\cdot\frac{K_o}{m_o} = \frac{\left(1+a^3\right)^{4/3}}{a^2}\left(1-X^3\right)^{2/3}\cdot\frac{K_o}{m_o}} \qquad (10\text{-}13)$$



Дифференцируя по «а», считая X (или Δx) постоянным числом, находим условие минимума: $\boxed{a^3 = 1}$ откуда $\rho_я = \left(1+a^3\right)\rho_o = 2\rho_o$

Как видим, ***только при плотности, ровно в два раза больше исходной плотности шара удельная кинетическая энергия ядра будет наименьшей***. Назовем ее **критической** плотностью.

Слева на графике показано, как изменяется функция (10-13) удельной кинетической энергии ядра в зависимости от коэффициента «a^3». Из графика видно, что как при малой, так и при большой плотности ядра, затраты энергии системы на его образование стремительно растут. И только при удвоенной исходной плотности ($a = 1$) функция УЦЭ имеет острый минимум! Это говорит о том, что только при этой плотности затраты энергии на работу по преодолению центробежных сил при образовании ядра будут наименьшими по величине. Принцип наименьших затрат – выполняется. Это говорит также о том, что

До тех пор, пока плотность центрального сгущения, постепенно увеличиваясь, не станет равна критической плотности, оно (сгущение) расширяться не сможет, всегда оставаясь пространственно малой областью (керн). И только когда плотность сгущения достигнет критической плотности оно начинает расти, расширяться, называясь теперь ядром.

Отметим: такое же заключение мы сделали ранее, рассматривая эволюцию плоского гидродинамического облака.

ЦС и УЦЭ по оболочке.

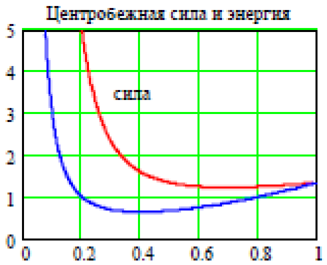
"Коллапс вращающегося облака пока изучен лишь предварительно, но уже из этих расчетов видно, что в результате коллапса вращающего облака непосредственно образуется не планетная система, а двойная или кратная система звезд". (Р.Б. Ларсон. "Коллапс").

Задача. Дано однородное сферическое тело. Не выдержав тяжести, центральное вещество сжалось, образовав ядро. Показать изменение ЦС и УЦЭ в период перехода оболочки в ядро, если плотность оболочки не меняется, локальный момент вращения сохраняется, а плотность ядра равна $\rho_я = \left(1+a^3\right)\rho_o$

Мы уже неоднократно находили формулы ЦС и УЦЭ для одной частицы, они имеют вид

$\omega = \frac{x_o^2}{x^2}\omega_o$	$F = \frac{x_o^4}{x^3}F_o$; $F_o = \omega_o^2 R_o$	$K_y = \frac{x_o^4}{x^2}K_o^y$; $K_o^y = \frac{1}{2}R_o^2\omega_o^2$
$r_o^3 = r^3 + \Delta r^3 = r^3 + R_o^3 - R^3 = r^3 + a^3 R_я^3$; $x_o^3 = x^3 + \Delta x^3 = x^3 + 1 - X^3 = x^3 + a^3 X_я^3$		

Используя формулы перехода, имеем



$$K_y = \frac{(x^3 + 1 - X^3)^{4/3}}{x^2}K_o^y = \frac{(x^3 + a^3 X_я^3)^{4/3}}{x^2}K_o^y \quad (1\text{-}7)$$

$$F = \frac{(x^3 + 1 - X^3)^{4/3}}{x^3}F_o = \frac{(x^3 + a^3 X_я^3)^{4/3}}{x^3}F_o \quad (2\text{-}7)$$

Первая формула каждого уравнения показывает поведение функций от поверхности тела и вплоть до точки вихревого стока. Вторая формула показывает поведение тех же функций от поверхности тела до ядра плотности $\rho_я = (1 + a^3)\rho_o$. Исследуем одновременно обе функции, сравнивая их поведение в один и тот же момент времени, то есть, при одном и том же радиусе тела.

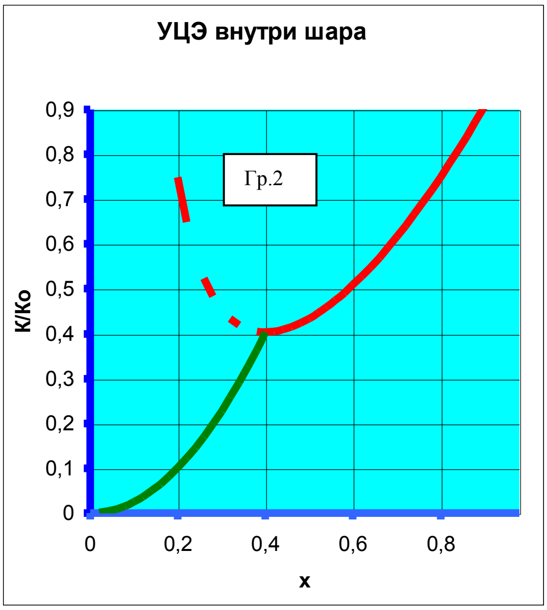
Тело в ОС$_o$ $(X = 1)$: $F = x \cdot F_o$; $K_y = x^2 K_o^y$ Обе функции, имея наибольшее значение на поверхности тела, с глубиной уменьшаются до нуля в центре. С появлением центрального сгущения, жидкость, имея дифференциальное вращение, устремилась к точке вихревого стока. С этого момента поведение функций резко меняется. Вначале, считая от поверхности тела, обе функции монотонно уменьшаются, достигают минимума и затем стремительно растут. Поведение функций в период *точечного* вихревого стока показано на гр.1 при $X = 0{,}95$.

Поведение УЦЭ.

Нас интересует, какое сопротивление перемещению (вдоль радиуса) частиц оболочки к центру вращения оказывает центробежная сила. Глядя на кривую УЦЭ, (гр.1 синего цвета) которая как раз и показывает величину сопротивления, замечаем, что центральное сгущение, никак не может быть плотным точечным образованием, так как при подход к <u>такому</u> ядру, центробежные силы стремительно растут. Ясно, что центральное вещество начнет сгущаться там и только тогда, когда центробежные силы здесь будут наименьшими. Находим минимум кривой УЦЭ:

$$K_y = \frac{(x^3 + a^3 X_я^3)^{4/3}}{x^2}K_o^y \ ; \qquad (K_y)'_x = 0 \ ; \quad x = x_{\min} = aX_я \qquad (A)$$

Откуда видим, что при $a = 1$, имеем $x = X_я$ и $\rho_я = (1 + a^3)\rho_o = 2\rho_o$



Как видим, при плотности ядра в два раза больше исходной плотности, в ядро входят и образуют его частицы, имеющие минимум удельной кинетической энергии. Мы получили следующее подтверждение верности Требования наименьших затрат.

Слева на графике показана кривая изменения удельной центробежной энергии (УЦЭ) внутри оболочки сферического тела

Если плотность ядра в два раза больше исходной плотности минимум УЦЭ будет всегда приходиться на границу оболочки с ядром. То есть, уплотнение вещества оболочки возле ядра всегда происходит при наименьшем тому сопротивлении со стороны центробежной силы.

А это и означает, что затраты энергии на преодоление центробежных сил будут здесь всегда наименьшими. Так реализуется ТНЭЗ на преодоление центробежных сил.